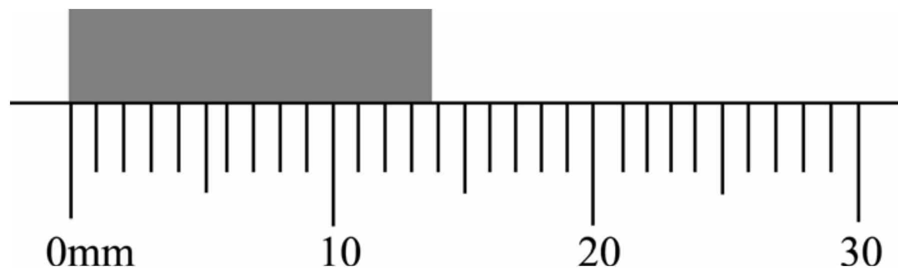
1.2 数据处理与测量结果表示

1.2.1 测量值的有效数字

1. 有效数字的基本概念

任何测量结果都存在误差，测量值的位数不能任意的取舍，应反映出测量值的准确度。

三个不同测量者用米尺测量一个物体的长度，记录的测量值分别为：



13.5mm　　**13.6mm**　　**13.4mm**

前两位称为可靠数字（或准确数字）

后一位称为可疑数字（或欠准数字）

注意:

一个物理量的测量值与数学上的一个数有着不同的含义。长度2.60mm和2.600mm在数学上没多大区别，而物理上它们包含的意义完全不同。

2.60mm　用游标卡尺测量的测量值。

2.600mm　用千分尺测量的测量值。

2. 直接测量的读数原则

直接测量时，必须正确读取有效数字，一定充分反映出计量器具的准确度，它是仪器指示的全部有意义的数字和能够估读出来的数字。

(1) 米尺、千分尺、指针式电表等仪器，读数应该读到仪器最小分度以下的估读位（欠准位）。最小分度位是准确位，欠准位的读数通常根据最小分格的大小、指针的粗细等具体情况读出最小分度值的1/10，1/5或1/2。

(2) 游标类器具（如游标卡尺、分光计角度游标盘），一般不估读，读数只读到游标的分度值，特殊情况估读到游标分度值的一半。

(3) 数显仪表及步进式读数仪器（电阻箱、惠斯通电桥等）无法进行估读，仪器所显示的末位就是欠准位，末位所显示的数字就是可疑数字。

(4) 读数时，如测量值恰为整数，则必须补零，一直补到可疑位。例如游标卡尺测长度恰为**10mm**时，应记为**10.00mm**。如改用千分尺测量，量值应记为**10.000mm**。

3. 间接测量中有效数字运算规则

(1) 加减运算

在加减法运算时，所得结果的有效数字的末位数与参加运算的诸数中末位数数量级最高的那一位取齐，称为“尾数取齐”。

$$13.6+1.625=15.2$$

因为小数点后面的第一位2已是可疑数字。

(2) 乘除运算

乘除运算中，所得结果的有效数字的末位数与参加运算的诸数中有效数字位数最少的那个数相同，称为“尾数取齐”。

$$1.1111 \times 1.11 = 1.23$$

因为小数点后面的第二位3已是可疑数字。

(3) 乘方、开方运算

运算所得结果的有效数字位数与被乘方、开方的原数有效数字的位数相同。

$$\sqrt{100} = 10.0 \qquad 4.0^2 = 16$$

(4) 自然数与无理常数

自然数与无理常数 π、$\sqrt{2}$ 等不是测量产生的，不存在有效位数问题，需要几位就取几位。对公式中的物理常数，运算时一般根据需要比参与运算的其它量中有效位数最少的多取一位或两位有效数字即可。

例如:

面积: $S = \pi r^2 = 3.1416 \times 6.042^2 = 114.7\ \mathrm{cm}^2$

(5) 单位换算与科学计数法

有效数字是仪器精度和被测量本身大小的客观反映，不能随意增减，在单位换算或交换小数点位置时，为保证有效数字位数不变而应用科学记数法，把不同单位用**10**的不同次幂表示。

例如:

$$1.4\text{nm} = 1.4\times10^{-9}\text{m}$$

$$1.4\text{m} = 1.4\times10^{2}\text{cm} = 1.4\times10^{3}\text{mm} = 1.4\times10^{6}\mu\text{m} = 1.4\times10^{9}\text{nm}$$

说明:

上述运算规则不是绝对的，为避免运算中由于数字的多次取舍而引入计算误差，对中间结果的有效数字位数应比上述规则的多保留一至两位为妥，如果使用计算机计算，那中间结果的有效位数还可多取几位，但最后结果的有效数字的取位一定以与不确定度对齐的原则为准。

4. 有效数字尾数的舍入法则（数据修约法则）

数据修约就是去掉数据中多余的位。为了使“入”和“舍”的机会均等，测量结果数字的取舍采用“四舍六入五凑偶”规则。

当拟舍去数字的最高位为4或4以下的数，则“舍”；

例：　8.08<u>41</u>——8.08

当拟舍去数字的最高位为6或6以上的数，则“入”；

例：　8.08<u>61</u>——8.09

当拟舍去数字的最高位为5时:

(1) 若5后无数字或皆为零时，

若前一位数为奇数，则“入”，

例：8.075→8.08，8.0750→8.08。

若前一位数为偶数，则“舍”。

例：8.085→8.08，8.0850→8.08。

(2) 若5后尚有非零的数字则“入”

例：8.0851→8.09，8.07501→8.09。

1.2.2 测量结果的表示及不确定度估计

不确定度的意义就是由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度，或者说是被测量的真值所处在某个量值范围的评定。

1. 单次直接测量结果

对某一物理量只能测一次或只需测一次，这样的测量量称为单次测量量。单次测量的测量值x就作为单次测量量的最佳估计值。

物理实验教学中约定一般用仪器误差$\Delta_{仪}$直接作为单次测量结果**x**的不确定度U_x。有

$$U_x = \Delta_{仪}$$

表示真值落在置信区间$(x-U_x, x+U_x)$之外的可能性很小。单次测量结果可表示为

$$x = (x \pm \Delta_{仪})单位$$

对于测量结果**x**，还可以用相对不确定度评定，有

$$E = \frac{U_x}{x} \times 100\%$$

2. 有限次等精度直接测量结果

总不确定度U_x的各误差因素引起的不确定度分量从估计方法上分成两类。

A类不确定度 u_A：可用统计方法计算出的分量。

B类不确定度 u_B：用非统计方法估计出的分量。

$$U_x = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

(1) 不确定度A类分量 u_A 的估算

$$u_A = S_x = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

(2) 不确定度B类分量 u_B 的估算

$$u_B = \Delta_{仪}$$

有限多次等精度测量结果的不确定度估算可写为:

$$U_x = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{S_x^2 + \Delta_{仪}^2}$$

有限多次等精度测量结果表示为:

$$x = (x \pm \Delta_{仪})\text{单位}$$

相对不确定度为:

$$E = \frac{U_x}{x} \times 100\%$$

由于不确定度本身只是对测量结果置信程度的一种评定，其有效数字一般只取一位，且位数采用“只进不舍”的原则，相对不确定度可取两位有效数字。

测量结果有效数字的取位必须使其最后一位与不确定度最后一位取齐，并且单位要相同。

例如：用数字毫秒表计测得某单摆周期的算术平均值为**2.1832s**，计算不确定度为**0.00313s**，其结果表示成

$$T = (2.183 \pm 0.004)\ \mathbf{s}$$

相对不确定度为

$$E = \frac{U_x}{\overline{x}} = \frac{0.004}{2.183} = 0.18\%$$

3. 间接测量结果

间接测量的结果是由直接测量量的结果根据一定的函数关系计算出来的，设间接测量量为N，与彼此独立的直接测量量x，y，z，…的函数关系为

$$N = f(x, y, z, \cdots)$$

① 如果是和差形式的函数

$$dN = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \cdots$$

$$U_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 U_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 U_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 U_z^2 + \cdots}$$

② 如果是积商形式的函数

$$d(\ln N) = \frac{dN}{N} = \frac{\partial \ln f}{\partial x}dx + \frac{\partial \ln f}{\partial y}dy + \frac{\partial \ln f}{\partial z}dz + \cdots$$

$$dN = N\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}dx + \frac{\partial \ln f}{\partial y}dy + \frac{\partial \ln f}{\partial z}dz + \cdots\right)$$

$$U_N = \overline{N}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 U_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 U_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 U_z^2 + \cdots}$$

1.2.3. 实验数据处理方法

1. 列表法

将实验数据列成表格，使得数据清晰醒目，有条理，易于核查和发现问题，并且有助于反映出相关物理量之间的对应关系。数据表格要求简单醒目、合理美观，列表虽没有统一格式。

表2-1 金属杯体积测量数据（卡尺：量程：125cm 分度值 0.02mm）

次数 物理量	1	2	3	4	5	6	平均
内 径(d/mm)	14.02	14.00	14.02	13.98	13.96	14.04	
外 径(D/mm)	34.80	34.82	34.80	34.78	34.76	34.80	
深 度(h/mm)	29.98	29.96	30.00	29.98	29.96	30.32	
高 度(H/mm)	40.00	40.02	39.98	39.98	40.02	49.96	

2. 作图法

数据处理时，我们把一系列数据用图形或图像的形式表现出来的方法称为作图法。

根据数据表格作图的形式也不只一种，可以选用坐标纸手动作图，也可以使用各种计算机语言编程制图。物理实验教学强调的是作图的基本规则。

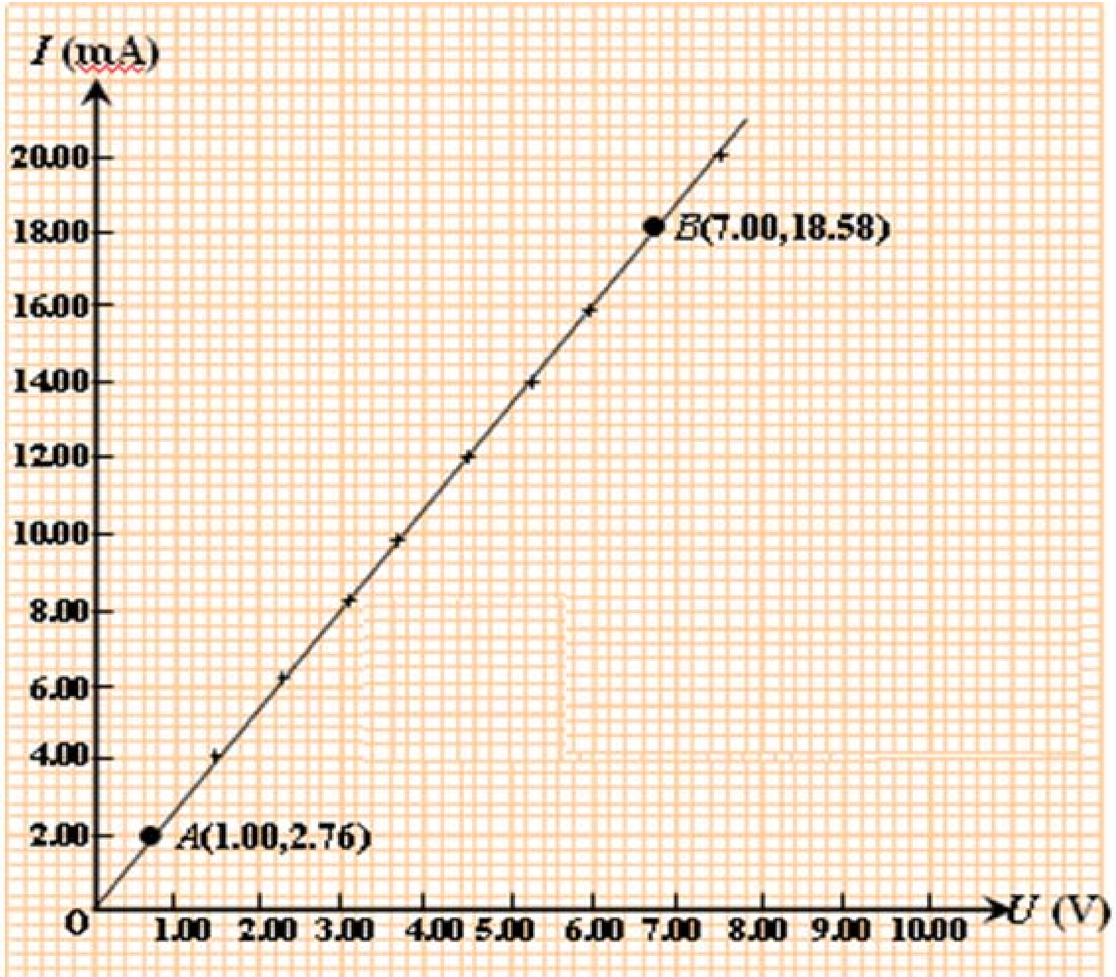


图 1.2-2 电阻伏安特性曲线

3. 最小二乘法

表2.2 等精度数据

y（单位）	y_1	y_2	y_3	…	y_n
x（单位）	x_1	x_2	x_3	…	x_n

用最小二乘法拟合出的一条最佳曲线，以寻找一个误差最小的实验方程。假定测量值 x_i 是准确的，所有的误差都是 y_i 造成的。那么拟合曲线的方程应该是：

$$y = a + bx$$

测量值 y_i 与最佳直线上的 y 值 $y = a + bx_i$ 的偏差为

$$v_i = y_i - y = y_i - (a + bx_i)$$

偏差平方和为:

$$s = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

a、b的取值是使y的偏差的平方和最小。根据S的极小值条件，令S分别对a和b的一阶偏导数为零。

$$\frac{\partial S}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-a-bx_i)=0$$

联立求解可得

$$a=\overline{y}-b\overline{x}$$

$$b=\frac{\overline{x}\cdot\overline{y}-\overline{xy}}{(\overline{x})^2-\overline{x^2}}$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

$$b = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{xy}}{(\overline{x})^2 - \overline{x^2}}$$

$$\overline{x} = \sum_i^n x_i \Big/ n \qquad \overline{y} = \sum_i^n y_i \Big/ n$$

$$\overline{xy} = \sum_i^n (x_i y_i) \Big/ n \qquad \overline{x^2} = \sum_i^n x_i^2 \Big/ n$$

直线截距**a**的标准差公式为 $S(a)=\dfrac{\sqrt{\overline{x^2}}}{\sqrt{n\left[\overline{x^2}-(\bar{x})^2\right]}}S(y)$

斜率*b*的实验标准差公式为 $S(b)=\dfrac{1}{\sqrt{n\left[\overline{x^2}-(\bar{x})^2\right]}}S(y)$

y_i 的实验标准差

$$S(y)=\sqrt{\frac{1}{(n-2)}\sum_{i=1}^{n}v_i^2}=\sqrt{\frac{1}{(n-2)}\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2}$$

4. 用Excel软件处理实验数据

在Excel工作表的单元格内输入文字及实验数据，通过输入公式和插入内置的函数可以完成诸如绘制种类繁多的各类图表，可以求和、求平均值等一般的数值计算，可以进行直线或曲线地拟合，方便进行最小二乘法的数据处理，完成实验标准差的计算和显示斜率、截距等。

5. 对半分逐差法

例如迈克尔逊干涉仪测激光波长物理实验中，等倾干涉条纹中心“陷入”或“冒出”的条纹数x和可动反射镜的位置y呈现线性关系

$$y = y_0 + bx$$

斜率

$$b = \lambda / 2$$

λ 为激光波长，为实验测量量。

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9$$

$$\Delta y = \frac{(y_5 - y_0) + (y_6 - y_1) + \cdots + (y_9 - y_4)}{5}$$

则斜率的平均值为

$$\bar{b} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$